

# 二维三元周期复合结构的声带隙特性\*

张舒 程建春\*\*

南京大学声学研究所, 近代声学国家重点实验室, 南京 210093

**摘要** 研究了二维三元周期复合结构的声带隙特性. 三元周期结构的组成为: 基体 + 二元嵌入体, 二元嵌入体的构成为: “硬”材料(有较大的密度和声速)柱体外包一层“软”材料(有非常低的密度和小的声速). 由于声波在二元嵌入体环形区域的局部共振, 而且环形区的密度很低且声速很小, 使声带隙出现在较低频段. 分析了“包层”材料特性以及复合材料的结构参数对禁带产生的影响.

**关键词** 声子晶体 能带结构 三元复合材料 声带隙

近年来, 声子晶体的能带结构研究引起了人们极大兴趣<sup>[1~5]</sup>. 声子晶体(phononic crystal)是对应于光子晶体(photonic crystal)而言的弹性复合结构体. 声子晶体是由不同弹性性质的材料周期复合而成. 在声子晶体的能带结构中观察到了禁带现象, 频率位于禁带的声波完全不能通过声子晶体. 声子晶体的隔声特性在工程上有着广泛的应用价值, 如形成无振动的测量环境(对高精度的测量十分必要)和设计高性能的声学滤波器及新型的声学换能器等. 另一方面, 声子晶体表现出丰富的物理现象: 表面态, 缺陷态, Anderson 局域化等.

目前研究主要集中于二元周期复合材料<sup>[6~8]</sup>, 其中声带隙的产生机理是由于弹性波的 Bragg 全反射. 声带隙的中心频率  $f_0$  与声速  $C$  成正比, 而与“晶格”常数  $a$  成反比. 目前, 由局域化共振产生声带隙现象引起了研究人员的广泛兴趣. 由于三元材料中间较软层的局域化共振机理产生的声带隙在理论和实验上均得到了验证<sup>[9,10]</sup>.

本文研究了二维三元复合结构的声带隙现象. 我们以钨(W)和铝(Al)分别作为“核心”和“基体”材料, 而用不同性质的“软”材料做“包层”, 分析了“包层”弹性性质以及“包层”与“核心”之间的比例对声带隙的影响. 同时, 分析了不同周期排列结构(正方和三角周期结构)对声带隙的影响.

通过调整复合材料的结构, 使声带隙能够出现在更低频段, 且具有更宽的带宽.

## 1 理论

二元嵌入体的结构如图 1: “硬”材料 A(有较大的密度和声速)柱体外包一层“软”材料 B(有非常低的密度和小的声速), 其中  $r_1$ ,  $r_2$  分别是包层环柱的内外径. 图 2(a)和(b)分别是正方和三角周期排列结构的横截面图; 在无限大基底  $I$  中周期排列由 A 和 B 组成的无限长柱体形成二维声子晶体, 晶格常数为  $a$ .

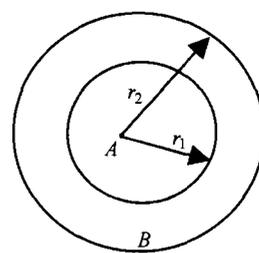


图 1 二元嵌入体的结构

设“核心”A 和“包层”B 的占有比分别为  $f_A$  和  $f_B$ , 嵌入圆柱的总占有比  $f = f_A + f_B$ . 基体、“包层”B 和“核心”A 的密度和弹性常数分别是

2003-02-24 收稿, 2003-04-28 收修稿

\* 国家杰出青年科学基金资助项目(批准号: 10125417)

\*\* 联系人, E-mail: jccheng@nju.edu.cn

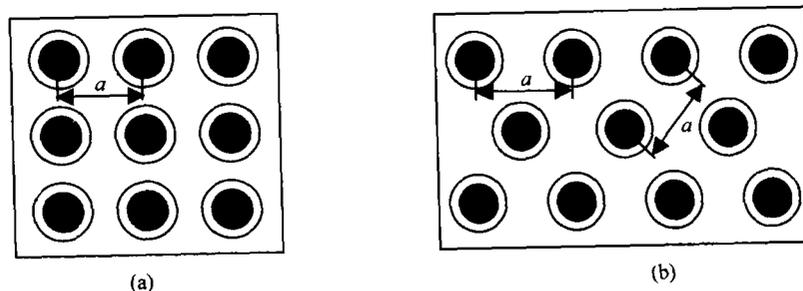


图2 二维三元正方格(a)和三角(b)周期排列结构晶体横截面

$(\rho^I, C_{ij}^I)$ ,  $(\rho^B, C_{ij}^B)$  和  $(\rho^A, C_{ij}^A)$ . 取  $z$  轴与无限长柱体中心轴平行,  $(x, y)$  平面垂直于柱体. 考虑弹性波在  $(x, y)$  平面内传播, 则存在两种偏振:  $z$  方向偏振(位移  $u_z$ )和  $x-y$  平面内的偏振(位移  $u_x$  和  $u_y$ ), 而且这两种偏振是完全解耦的. 弹性波场满足方程

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \nabla_T \cdot (C_{44} \nabla_T u_z), \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \nabla_T \cdot (C_{44} \nabla_T u_i) + \nabla_T \cdot \left( C_{44} \frac{\partial u_T}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} [(C_{11} - 2C_{44}) \nabla_T \cdot u_T], \quad (2)$$

其中  $i = x, y$ ,  $\nabla_T = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ ,  $u_T = (u_x, u_y)$ ,  $(\rho, C_{ii})$  是密度和弹性系数. 由于在  $(x, y)$  平面内的周期性, 可将  $(\rho, C_{ij})$  展成 Fourier 级数形式

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} \rho(\mathbf{G}) e^{i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}}, \quad (3)$$

$$C_{ij}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} C_{ij}(\mathbf{G}) e^{i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}}, \quad (4)$$

其中  $\mathbf{r} = (x, y)$ ,  $\mathbf{G} = (G_x, G_y)$  是  $(x, y)$  平面的倒格子矢量. 方程(3)和(4)中的 Fourier 系数分别为

$$\rho(\mathbf{G}) = \frac{1}{S_c} \iint d^2 \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}}, \quad (5)$$

$$C_{ij}(\mathbf{G}) = \frac{1}{S_c} \iint d^2 \mathbf{r} C_{ij}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}}, \quad (6)$$

积分在晶格元胞  $S_c$  上计算. 方程(5)和(6)式可化成下面的形式:

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{G} = 0) = \bar{\rho} = \rho^A f_A + \rho^B f_B + \rho^I (1 - f_A - f_B) \\ \rho(\mathbf{G} \neq 0) = F_1(\mathbf{G})(\rho^A - \rho^B) + F_2(\mathbf{G})(\rho^B - \rho^I) \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} C_{ii}(\mathbf{G} = 0) = \bar{C}_{ii} = C_{ii}^A f_A + C_{ii}^B f_B + C_{ii}^I (1 - f_A - f_B) \\ C_{ii}(\mathbf{G} \neq 0) = F_1(\mathbf{G})(C_{ii}^A - C_{ii}^B) + F_2(\mathbf{G})(C_{ii}^B - C_{ii}^I) \quad (i = 1, 4), \end{cases} \quad (8)$$

其中  $F_1(\mathbf{G}), F_2(\mathbf{G})$  是结构因数

$$F_1(\mathbf{G}) = \frac{1}{S_c} \iint_A d^2 \mathbf{r} e^{-i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}}, \quad (9)$$

$$F_2(\mathbf{G}) = \frac{1}{S_c} \iint_{A+B} d^2 \mathbf{r} e^{-i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}}, \quad (10)$$

方程(9)中积分只在媒质 A 上计算, 方程(10)在整个嵌入圆柱 A+B 的上积分.

对  $(x, y)$  平面中传播的波, 引入波矢  $\mathbf{K} = (K_x, K_y)$  (其中  $K_z = 0$ ), 且由于复合结构的周期性, 位移矢量满足 Bloch 定理.

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \exp[i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \sum_{\mathbf{G}} \mathbf{u}_{\mathbf{K}}(\mathbf{G}) e^{i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}}, \quad (11)$$

其中  $\omega$  是圆频率,  $\mathbf{K}$  是 Bloch 波矢(如图3). 方程(11)代入方程(1)和(2), 并且结合方程(7)和(8)分别得到  $z$  方向偏振(称为 Z 偏振)和  $(x, y)$  平面偏振(称为 XY 偏振)的运动方程,

$$\begin{aligned} & (\bar{C}_{44} |\mathbf{K} + \mathbf{G}|^2 - \bar{\rho} \omega^2) u_{\mathbf{K}}^z(\mathbf{G}) + \sum_{\mathbf{G}' \neq \mathbf{G}} \{ [(C_{44}^A - C_{44}^B) (\mathbf{K} + \mathbf{G}) \cdot (\mathbf{K} + \mathbf{G}') - (\rho^A - \rho^B) \omega^2] \times F_1(\mathbf{G} - \mathbf{G}') + [(C_{44}^B - C_{44}^I) (\mathbf{K} + \mathbf{G}) \cdot (\mathbf{K} + \mathbf{G}') - (\rho^B - \rho^I) \omega^2] \times F_2(\mathbf{G} - \mathbf{G}') \} u_{\mathbf{K}}^z(\mathbf{G}') = 0, \quad (12) \\ & [\bar{C}_{44} |\mathbf{K} + \mathbf{G}|^2 - \bar{\rho} \omega^2] u_{\mathbf{K}}^T(\mathbf{G}) + (\bar{C}_{11} - \bar{C}_{44}) (\mathbf{K} + \mathbf{G})(\mathbf{K} + \mathbf{G}) \cdot u_{\mathbf{K}}^T(\mathbf{G}) + \sum_{\mathbf{G}' \neq \mathbf{G}} F_1(\mathbf{G} - \mathbf{G}') - \{ (C_{44}^A - C_{44}^B) [(\mathbf{K} + \mathbf{G}) \cdot (\mathbf{K} + \mathbf{G}') u_{\mathbf{K}}^T(\mathbf{G}') + (\mathbf{K} + \mathbf{G}')(\mathbf{K} + \mathbf{G}) \cdot u_{\mathbf{K}}^T(\mathbf{G}') - 2(\mathbf{K} + \mathbf{G})(\mathbf{K} + \mathbf{G}') \cdot u_{\mathbf{K}}^T(\mathbf{G}')] + (C_{11}^A - C_{11}^B) (\mathbf{K} + \mathbf{G})(\mathbf{K} + \mathbf{G}') \cdot u_{\mathbf{K}}^T(\mathbf{G}') - (\rho^A - \rho^B) \omega^2 u_{\mathbf{K}}^T(\mathbf{G}') \} + \sum_{\mathbf{G}' \neq \mathbf{G}} F_2(\mathbf{G} - \mathbf{G}') \{ (C_{44}^B - C_{44}^I) [(\mathbf{K} + \mathbf{G}) \cdot (\mathbf{K} + \mathbf{G}') u_{\mathbf{K}}^T(\mathbf{G}') + (\mathbf{K} + \mathbf{G}')(\mathbf{K} + \mathbf{G}) \cdot u_{\mathbf{K}}^T(\mathbf{G}') - 2(\mathbf{K} + \mathbf{G})(\mathbf{K} + \mathbf{G}') \cdot u_{\mathbf{K}}^T(\mathbf{G}')] + (C_{11}^B - C_{11}^I) (\mathbf{K} + \mathbf{G})(\mathbf{K} + \mathbf{G}') \cdot u_{\mathbf{K}}^T(\mathbf{G}') - (\rho^B - \rho^I) \omega^2 u_{\mathbf{K}}^T(\mathbf{G}') \} = 0, \quad (13) \end{aligned}$$

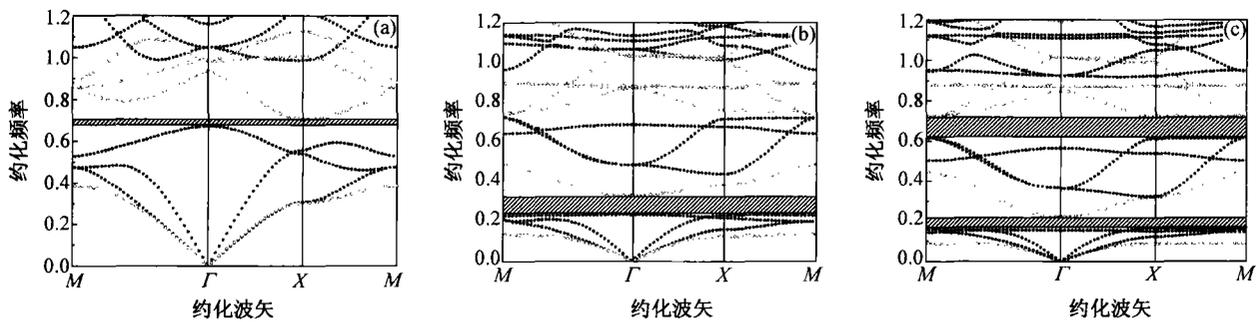


图3 正方周期结构复合材料 Z 偏振 (空心点) 和 XY 偏振 (实心点) 的能带图

(a) W 圆柱置于 Al 基体中二元复合结构的能带结构图.  $a = 20 \text{ mm}$ ,  $r_1 = r_2 = 6 \text{ mm}$ ; W “核心”,

Al “基体”而“包层”分别为环氧树脂(b)和聚乙烯(c)三元复合结构的能带图.  $a = 20 \text{ mm}$ ,  $r_1 = 6 \text{ mm}$ ,  $r_2 = 9 \text{ mm}$

式中位移矢量  $u_K^T(\mathbf{G}) = [u_x(\mathbf{G}), u_y(\mathbf{G})]$ . (12) 和(13)式是无限线性联立方程组, 为了计算, 实际运用中  $\mathbf{G}$  取有限项. 方程有解条件要求(12), (13)式中  $u_K^x, u_K^y$ , 的系数矩阵的行列式(包含  $\mathbf{K}$  和  $\omega$ ) 为零, 从而得到  $\mathbf{K}$  和  $\omega$  的关系方程(即色散曲线), 这个问题等价于求解(12)和(13)式特征值的问题. 通过给定  $\mathbf{K}$  的值, 就可求出相应的  $\omega(\mathbf{K})$ . 从而可以求出  $\mathbf{K} - \omega$  关系, 即能带图. 若在某一频率范围里面,  $\mathbf{K} - \omega$  关系方程式无解, 则可以说这一频率范围对应于禁带.

## 2 数值计算和讨论

晶体结构的倒格子矢量  $\mathbf{G}$  分别表示为

$$\text{正方结构: } \mathbf{G} = (2\pi/a)(n_x \mathbf{e}_1 + n_y \mathbf{e}_2),$$

$$\text{三角结构: } \mathbf{G} = (2\pi/a)[(n_x - n_y)\mathbf{e}_1 + (n_x + n_y)/2\mathbf{e}_2],$$

其中  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  为倒格矢空间的单位矢量,  $(n_x, n_y)$  为整数. 在数值计算中,  $n_x, n_y$  大小限定为  $-N \leq n_x, n_y \leq +N$ . 复合材料的占有比为

$$\text{正方结构: } f = \pi d_2^2 / 4a^2, (d_2 = 2r_2),$$

$$\text{三角结构: } f = \pi d_2^2 / (2a^2 \sqrt{3}), (d_2 = 2r_2),$$

图3为正方周期结构复合材料 Z 偏振和 XY 偏振的能带图, 图中纵轴和横轴分别为归一化频率  $\Omega = \omega d_2 / (2\pi C_0)$  和第一 BZ 区的约化波矢  $k = K d_2 / (2\pi)$ , 其中  $C_0 = \sqrt{(C_{44} / \rho)}$  和  $d_2 = 2r_2$ .  $\mathbf{K}$  在第一 BZ 区高度对称的  $\Gamma X M$  方向(如图4)取值. 能带图3(a)是由 W 柱体和 Al 基体构成的二元复合结构, 其中晶格常数  $a = 20 \text{ mm}$ , 圆柱半径  $r_1 = r_2 = 6 \text{ mm}$ . 可以看到在归一化频率 0.68 附近出现一条禁带(阴影部分), 禁带的中心频率为 608kHz.

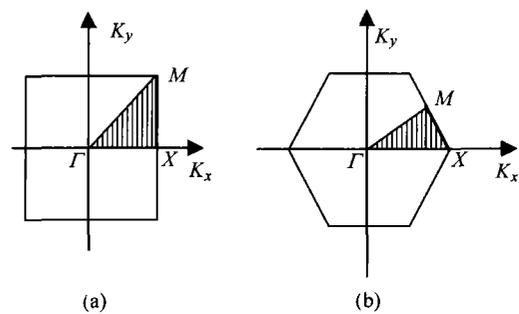


图4 方格结构(a)和三角结构(b)的第一 Brillouin 区

图3(b), (c)是由同样 Al 作基体, W 作为“核心”, 而“包层”分别为环氧树脂(epoxy), 聚乙烯(polyethylene)的三元复合结构的能带图. 3种复合结构的晶格常数与钨圆柱半径均取同样的数值:  $a = 20 \text{ mm}$ ,  $r_1 = 6 \text{ mm}$ ,  $r_2 = 9 \text{ mm}$ . 图3(b)中阴影部分标出的声带隙的中心频率分别 279kHz. 图3(c)观察到了两条声带隙, 其中第一声带隙的中心频率为 196kHz.

图3(a)中的声带隙产生机理是弹性波的 Bragg 反射, 声带隙中心频率和基体材料 Al 的弹性参数成正比. 当加上“包层”后, 声带隙的中心频率向低频段移动, 并且声带隙的宽度也变宽. 对比表1所示材料参数, 两种包层物质相对 W 和 Al 而言较“软”, 即声阻抗较小. 对比图3(b)和(c), 可以看到, “包层”材料的声阻抗越小, 越容易在低频率段产生声带隙. 这可以解释为: 共振时, 中间包层材料作用类似于一个软弹簧. 软材料的弹性参数越小, 对应的系统共振频率越低, 故容易在低频段产生声带隙. 同时, 在图3(b)和(c)中可以观察到在禁带附近的能带非常平坦, 群速度几乎为零, 产生了很好的局域化现象.

表1 材料的物理参数,  $C_l$ ,  $C_t$  分别是材料纵向和横向声速

	$\rho$ $\times 10^3 / (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	$C_{11}$ $\times 10^6 / (\text{N} \cdot \text{cm}^{-2})$	$C_{44}$ $\times 10^6 / (\text{N} \cdot \text{cm}^{-2})$	$C_l = (C_{11}/\rho)^{1/2}$ $/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	$C_t = (C_{44}/\rho)^{1/2}$ $/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$
W	19.3	50.1	15.14	5090	2800
Al	2.692	11.2	2.79	6450	3220
epoxy	1.2	0.964	0.161	2830	1160
polyethylene	0.9	0.342	0.0262	1950	1700

图5是“核心”为W, 基体为Al, “包层”为环氧树脂正方周期排列结构声带隙宽度和中心频率随“核心”半径  $r_1$  变化的曲线图,  $a = 20 \text{ mm}$ ,  $r_2 = 9 \text{ mm}$ . 固定晶体的结构参数和嵌入柱体的总占有比, 研究包层材料相对核心材料的比例变化对声带隙的中心频率和宽度的影响. 图中沿纵轴方向的条形线为声带隙的宽度, 经过条形线中点的曲线代表声带隙的中心频率. 可以看到, 随着半径  $r_1$  的增大, 带隙的中心频率单调增大. 当  $r_1$  变小, 包层相对于核心材料比例变大时, 共振频率变低. 当  $r_1 \rightarrow 5.25 \text{ mm}$  时, 禁带消失. 随着  $r_1$  增大, 包层相对核心材料比例变小, 当“包层”很薄时, 近似于由钨和铝组成的二元复合材料, 则共振效应消失, Bragg 反射对声带隙的产生起主导作用. 因为二元复合材料的声带隙<sup>[2]</sup>在占有比较大时会消失 ( $f = 0.64$ ), 没有观察到声带隙. 图5中虚线为三角周期排列结构的声带隙, 其中  $a$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  的数值与正方结构相同. “ $\times$ ”符号标出了声带隙的中心频率. 可以看出两种排列结构的声带隙中心频率基本相同, 而三角结构的声带隙较宽. 说明在低频段的第一声带隙主要是由于包层材料的局域化共振产生, 所以晶格排列结构对禁带的中心频率影响不大.

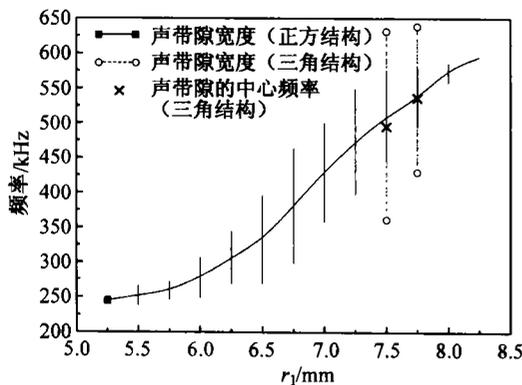


图5 W“核心”, Al基体, “包层”为环氧树脂复合结构声带隙宽度和中心频率随“核心”材料半径变化曲线图

$a = 20 \text{ mm}$ ,  $r_2 = 9 \text{ mm}$

### 3 结论

本文研究了三元周期复合结构的能带特性. 计算表明, 在二元复合结构的“核心”材料外包较“软”的“包层”材料, 由于局域化共振能够使声带隙的中心频率降低, 并且声带隙的宽度变大. 通过改变材料的结构参数, 发现当“包层”相对于核心材料的厚度比例加大时, 声带隙的中心频率降低. 文章比较了三角和正方二种周期排列结构声带隙的产生情况, 发现在三元复合材料中, 共振对禁带的产生起了主要作用所以晶格的形状对禁带的中心频率影响不大.

### 参 考 文 献

- 1 Kushwaha M S, et al. Acoustic band structure of periodic elastic composites. *Phys Rev Lett*, 1993, 71: 2022
- 2 Vasseur J O, et al. Complete acoustic band gaps in periodic fibre reinforced composite materials: The carbon/epoxy composite and some metallic systems. *J Phys*, 1994, 6: 8759
- 3 Montero F R, et al. Ultrasonic band gaps in a periodic two-dimensional composite. *Phys Rev Lett*, 1997, 80: 1208
- 4 Vasseur J O, et al. Experimental evidence for the existence of absolute acoustic band gaps in two-dimensional periodic composite media. *J Phys*, 1998, 10: 6051
- 5 Sánchez-Pérez J V, et al. Sound scattering by a two-dimensional array of rigid cylinders. *Phys Rev Lett*, 1998, 80: 5325
- 6 García-Pablos D, et al. Theory and experimental on elastic band gaps. *Phys Rev Lett*, 2000, 84: 4349
- 7 Vasseur J O, et al. Experimental and theoretical evidence for the existence of absolute acoustic band gaps in two-dimensional solid phononic crystals. *Phys Rev Lett*, 2000, 86: 3012
- 8 Liu Z Y, et al. Elastic wave scattering by periodic structure of spherical objects: Theory and experiment. *Phys Rev B*, 2000, 62: 2446
- 9 Liu Z Y, et al. Locally resonant sonic materials. *Science*, 2000, 289: 1734
- 10 Liu Z Y, et al. Three-component elastic wave band-gap material. *Phys Rev B*, 2002, 65: 165116~1